(1) $D_f = (0,1)$ olsun.

$g_1(x) = f(x^2-1)$ için

$$\begin{aligned} D_{g_1} &= \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \in (0,1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2-1 < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| < \sqrt{2}\} \\ &= (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$g_2(x) = f(\ln^2 x)$ için

$$\begin{aligned} D_{g_2} &= \{x \in \mathbb{R} : \ln^2 x \in (0,1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < \ln^2 x < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < \ln x < 0 \ \vee \ 0 < \ln x < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : e^{-1} < x < 1 \ \vee \ 1 < x < e\} \\ &= \left(\tfrac{1}{e}, e\right) \setminus \{1\} \end{aligned}$$

(2) $f: X \to Y$, $E \subset X$, $F \subset Y$ olsun.

(i) $\forall y \in f(E) \cap F$ alalım. $y \in F \wedge y \in f(E)$ olup $\exists x \in E$ için $f(x) = y$ dir. $y \in F$ ve $f(x) = y$ old. dan $x \in f^{-1}(F)$ olup $x \in E \cap f^{-1}(F)$ dir. Buradan $y = f(x) \in f(E \cap f^{-1}(F))$ olur.

$$f(E) \cap F \subseteq f(E \cap f^{-1}(F)) \quad \ldots\ldots\ldots (+)$$

(ii) $\forall y \in f(E \cap f^{-1}(F))$ alalım. O zaman $\exists x \in E \cap f^{-1}(F)$ için $f(x) = y$ dir. Buradan $x \in E$ ve $x \in f^{-1}(F)$ olup $f(x) \in F$ dir. $x \in E \Rightarrow f(x) \in f(E)$ ile $y = f(x) \in f(E) \cap F$ çıkar. Yani

$$f(E \cap f^{-1}(F)) \subseteq f(E) \cap F \quad \ldots\ldots (++)$$

(+) ve (++) ile eşitlik bulunur.

③ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2}$ olsun. Genel terimi olmayan (a_n) dizisi için

ⓐ (a_n) üstten sınırlıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < B$ olup $a_{n+1} < B$?

$a_n < B$ ise $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} < \frac{B+5}{2} \leq B$ olup $B = 5$ için (a_n) üstten sınırlıdır.

ⓑ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + 5}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2a_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{5}{10} = 1$

(a_n) artandır.

Monoton artan ve üstten sınırlı her dizi supremum değerine yakınsak olduğundan $a_n \to L$, $\sup(a_n) = L$ ise $a_{n+1} \to L$ ile $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \Rightarrow$ her iki tarafın limiti alınırsa $L = \frac{L+5}{2} \Rightarrow L = 5$ bulunur.

④ $(b_n) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$ dizisi için,

$\left(\frac{b_n}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$ olup

$$(b_n) - \left(\frac{b_n}{2}\right) = 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + 2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} - 1\right] - \frac{2n-1}{2^n}$$ olur.

$(b_n) \to K$ ise

$\left(\frac{b_n}{2}\right) \to \frac{K}{2}$ olup $\quad \frac{K}{2} = 1 + 2(1) - 0 \Rightarrow K = 6$

olur.

⑤ $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ olması kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right) = (\infty \cdot 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1}{3/n^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} + 1\right)}{\frac{3}{n^3}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+3/n^3\right)^{2/3} + \left(1+\frac{3}{n^3}\right)^{1/3} + 1} = \frac{1}{3}$$ olur.

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{\sqrt{n^2+3}+n}\right)\cdot\left(\frac{2n+\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt{4n^2-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[4n^2-(4n^2-1)]\,\sqrt{n^2+3}+n}{[n^2+3-n^2].(2n+\sqrt{4n^2-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3(2n+\sqrt{4n^2-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3\left(2+2\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}\right)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ olur.}$$

⑦ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2} = (\infty-\infty)$ belirsizliği

olup eşlenik ile çarpılırsa $f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}$ için

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\sqrt{1/x^2}}}{|x|\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^6}}}}+|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}}{-\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^6}}}}-1}$$

$$= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

⑧ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ için eşlenik ile

pay ve paydayı çarparsak

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+11)-4(x-1)}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5} \frac{-3\cancel{x+15}}{\cancel{(x-5)}(x+5)\cdot(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} = \frac{-3}{10.(4+4)} = \frac{-3}{80}$$

⑨ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x}{x-1} = 12$ ise $\forall \varepsilon>0$ için $0<|x-2|<\delta$

old.da $\left|\dfrac{x^2+4x}{x-1}-12\right|<\varepsilon$ o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon)>0$?

$\varepsilon>0$ için $0<|x-2|<\delta<\frac{1}{2}$ olsun.

$$\left|\frac{x^2+4x}{x-1}-12\right| = \left|\frac{x^2+4x-12x+12}{x-1}\right| = \frac{|x-2|.|x-6|}{|x-1|}$$

$$|x-2|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<x-1<\frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{9}{2}<x-6<-\frac{7}{2} \text{ olup}$$

$|x-1|>\frac{1}{2}$ ve

$|x-6|<\frac{9}{2}$ olur. Buradan $\left|\dfrac{x^2+4x}{x-1}-12\right| < \dfrac{\delta.\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}} = \varepsilon \Rightarrow$

$\delta = \varepsilon/9$ olur. O zaman

$\forall \varepsilon>0$ için $\delta = \min\{\varepsilon/9, 1/2\}$ alınmalıdır.

(10) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x\left(1-e^{\frac{1}{x+1}}\right)}$ için $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)\cdot f_3(x)}$

alınırsa,

$f_1(x)=\arcsin x$, $[-1,1]=D_{f_1}$'de sürekli

$f_2(x)=x$, $\mathbb{R}$-de sürekli

$f_3(x)=\left(1-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$, $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$'de süreklidir.

$D_f=\left(D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}\right)\setminus\{x\in\mathbb{R}: f_2(x)\cdot f_3(x)=0\}$

$=(-1,0)\cup(0,1]$ olur.

$f(x)$ fonksiyonu D_f'de sürekli olup $x=0 \wedge x=-1$ noktaları incelenirse

- $f(0)$ yok ve $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x+1}}}=1\cdot\dfrac{1}{1-e}$

limiti var old.dan $x=0$ kaldırılabilir süreksizlik noktası;

- $f(-1)$ yok ve $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1-e^{1/x+1}}=\dfrac{+\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{0^+}}}$

$=\dfrac{\pi}{2}\cdot 0=0$

olur. Yani $x=-1$ kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.